

Sorbonne Université - Master Informatique
Paradigmes de Programmation Concurrente
MU5IN553



Cours 2 - Algèbre de processus

Carlos Agon - Romain Demangeon

11 octobre 2020

Calculus of Communicating Systems

Plan du cours

- Syntaxe et représentations graphiques
- Équivalence structurelle entre processus
- Sémantique opérationnelle entre processus
 - SOS (Structured Operational Semantic)
 - LTS (Labelled Transition System)

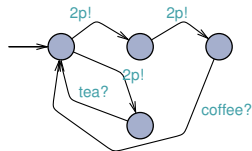
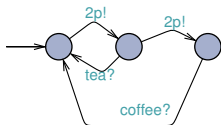
Calculus of Communicating Systems



Calculus of Communicating Systems - Robin Milner (1980)

Concepts

- Les composants d'un système sont des automates qui communiquent avec d'autres automates
- Utilisé pour la modélisation de systèmes interactifs.



Le langage reconnu par ces automates est

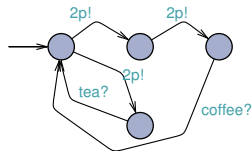
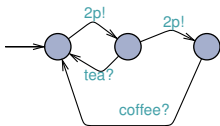
Calculus of Communicating Systems



Calculus of Communicating Systems - Robin Milner (1980)

Concepts

- Les composants d'un système sont des automates qui communiquent avec d'autres automates
- Utilisé pour la modélisation de systèmes interactifs.



Le langage reconnu par ces automates est $(2p!.(\text{tea?} + 2p.\text{coffee?}))^*$
 $2p!.(\text{tea?} + 2p!. \text{coffee?}) \neq 2p!. \text{tea?} + 2p!. 2p!. \text{coffee?}$

Processus séquentiels

Définition

$$P^{seq} ::= A\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \sum_{i \in I} \alpha_i.P_i$$

$\alpha.P$ l'action α entraîne le processus P

Si $I = \emptyset$ alors $P = 0$

On assume que tout processus peut être défini par une équation :

$$A(\vec{a}) =_{def} P_A$$

avec P_A une addition et $\vec{a} = a_1, \dots, a_n$ tous différents

Exemples

$$A(a, b) =_{def} a.A\langle a, b \rangle + b.B\langle a, a \rangle$$

$$B(c, d) =_{def} c.d.0 \text{ avec } 0 \text{ la somme vide}$$

Congruence structurelle

Si $\vec{b} = b_1, \dots, b_n$ (pas forcément différents) alors $A\langle \vec{b} \rangle$ est équivalent à $\{\vec{b}/\vec{a}\}P_A$

Congruence structurelle

Définition

Soit P et $Q \in \mathcal{P}^{seq}$ $P \equiv Q$ si on peut transformer l'un dans l'autre en remplaçant les occurrences de $A\langle \vec{b} \rangle$ par $\{\vec{b}/\vec{a}\}P_A$ (et vice-versa) pour un $A\langle \vec{a} \rangle =_{def} P_A$

Exemple :

soit

$$A(a, b) =_{def} a.A\langle a, b \rangle + b.B\langle a, a \rangle$$

$$B(c, d) =_{def} c.d.O$$

alors

$$B\langle a, a \rangle \equiv a.a.O$$

$$A\langle a, b \rangle \equiv a.(a.A\langle a, b \rangle + b.B\langle a, a \rangle) + b.a.a.O$$

Systèmes de transition étiquetés

Labelled Transition Systems (LTS)

Actions

$\mathcal{N} = \{a, b, \dots\}$ et $\overline{\mathcal{N}} = \{\bar{a} \mid a \in \mathcal{N}\}$ avec $\mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{N}} = \emptyset$

$\mathcal{L} = \mathcal{N} \cup \overline{\mathcal{N}} = Act$

Définition LTS

Labelled transition systems (LTS) sur $Act = (\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ avec :

- \mathcal{Q} un ensemble d'états
- \mathcal{T} une relation ternaire $\mathcal{T} \subseteq (\mathcal{Q} \times Act \times \mathcal{Q})$

On note $q \xrightarrow{\alpha} q'$ si $(q, \alpha, q') \in \mathcal{T}$

LTS de processus séquentiels

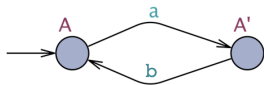
Définition

Labelled transition systems (LTS) sur Act avec :

- $Q = \mathcal{P}^{seq}$
- Si $P \equiv \sum_{i \in I} \alpha_i . P_i$ alors $\forall i \in I, P \xrightarrow{\alpha_i} P_i$

Exemple

$$A =_{def} a.A' \quad A' =_{def} b.A$$

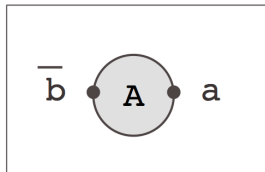


Processus concurrents

- Comment un ou plusieurs processus interagissent ?
- Distinction entre actions internes et externes

Flowgraphs

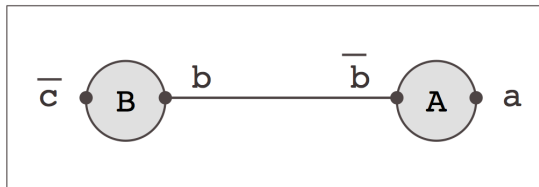
$$A =_{def} a.A' \qquad A' =_{def} \bar{b}.A$$



Interaction

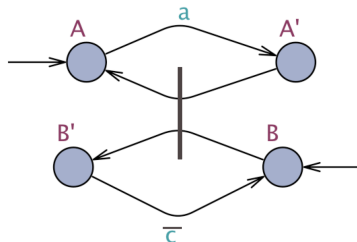
- Une paire complémentaire de ports (b, \bar{b}) est un moyen d'interaction entre deux processus (ce n'est pas un buffer ni un channel).

$$\begin{array}{ll}
 A =_{def} a.A' & A' =_{def} \bar{b}. A \\
 B =_{def} b. B' & B' =_{def} \bar{c}. B
 \end{array}$$



Actions internes

$$\begin{array}{ll}
 A =_{\text{def}} a.A' & A' =_{\text{def}} \bar{b}.A \\
 B =_{\text{def}} b.B' & B' =_{\text{def}} \bar{c}.B
 \end{array}$$

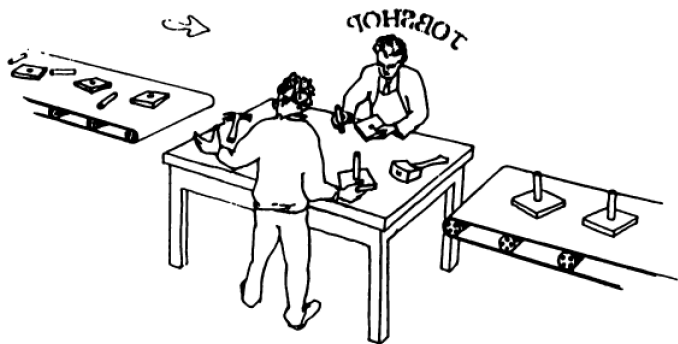


- l'action a se produit et induit les processus $A' \mid B$
- l'action partagée se produit et induit $A \mid B'$
- a et \bar{c} dans n'importe quel ordre induisent $A' \mid B$

L'action partagée (interne, réaction) est notée τ et $\text{Act} =_{\text{def}} \mathcal{L} \cup \tau$

Exemple

The jobshop



Calculus of Communicating Systems (CCS)

Définition

$$\mathcal{P} ::= A\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \sum_{i \in I} \alpha_i.P_i \mid P_1 \mid P_2 \mid \text{new } a.P \mid 0$$

Notation

On écrit $a.b$ à la place de $a.b.0$ et
 $\nu a.P$ à la place de $\text{new } a.P$

Réaction

Soit $P \equiv \bar{b}.A \mid b.B'$ alors $P \rightarrow A \mid B'$

Restriction

Si $P = (\nu a)a.b$ alors a est lié dans P .
 $(\nu a)a.b \equiv (\nu a')a'.b$

Réactions alternatives

Attention : $\nu aP|Q \equiv (\nu aP)|Q$ et non $\nu a(P|Q)$

Réaction

Soit $P = \nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\bar{a}.0)|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)$ alors

$P \rightarrow \nu aQ_1|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)$ et

$P \rightarrow \nu a(Q_2|\bar{a})|R_1$ mais

$P \not\rightarrow \nu a(Q_1|\bar{a})|R_2$

Renommage

$P \equiv \nu a'((a'.Q'_1 + b.Q'_2)|\bar{a}'.0)|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)$

comme Q_1 et Q_2 peuvent avoir des a alors on doit les remplacer par :

$Q'_1 = \{a'/a\}Q_1$ et $Q'_2 = \{a'/a\}Q_2$

CCS Syntaxe

Syntaxe

Soit $\mathcal{N} = \{a, b, c, \dots\}$ on définit $\text{Act} = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, c, \dots\} \cup \{\tau\}$

On définit l'ensemble de processus du CCS par :

- $D(\vec{x}) ::= P$
- $P ::= 0 \mid \alpha.P \mid D(\vec{v}) \mid P + P \mid P|P \mid \nu aP$
- $\alpha ::= a|\bar{b}|\tau$

Quelques formules

- $a.b.A + B$
- $(\nu b)(a.0 + \bar{a}.0)$
- $(\nu \tau)A + B$

Noms libres

- $\text{FN}(0) = \emptyset$
- $\text{FN}(\alpha) = \emptyset$ si $\alpha = \tau$ ou a si $\alpha \in \{\bar{a}, a\}$
- $\text{FN}(\alpha.P) = \text{FN}(\alpha) \cup \text{FN}(P)$
- $\text{FN}(P|Q) = \text{FN}(P) \cup \text{FN}(Q)$
- $\text{FN}(P + Q) = \text{FN}(P) \cup \text{FN}(Q)$
- $\text{FN}(\nu a P) = \text{FN}(P) \setminus \{a\}$
- $\text{FN}(P\{a/b\}) = \text{FN}(P)\{a/b\}$
- $\text{FN}(D\langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \{v_1, \dots, v_n\}$ sans répétitions

Substitution

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des noms pas liés dans P ,
 $P\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\}$ dénote la substitution simultanée des b_i par des a_i
 dans P .

- $\tau\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\} = \tau$
- $b\{\dots, a/b, \dots\} = a$
- $c\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\} = c$ si $c \notin \{b_1, \dots, b_n\}$
- $\alpha.P\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\} = \alpha\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\}.P\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\}$
- $(P + Q)\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\} = P\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\} + Q\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\}$
- $(P|Q)\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\} = P\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\}|Q\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\}$
- $(\nu c)P\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\} = (\nu c)P\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\}$ et $c \notin \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$
- $D\langle \nu_1, \dots, \nu_m \rangle\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\} = D\langle \nu_1\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\}, \dots, \nu_m\{a_1/b_1, \dots, a_n/b_n\} \rangle$

Congruence de processus

Définition context

Un contexte de processus \mathcal{C} est une expression avec un trou $[\]$.

$\mathcal{C} ::= [\] \mid \alpha.\mathcal{C} + \mathcal{M} \mid \text{new } a\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \mid P \mid P \mid \mathcal{C}$

Les contextes élémentaires sont :

$\alpha.[\] + \mathcal{M}, \text{new } a[\], [\] \mid P$ et $P \mid [\]$

$\mathcal{C}[Q]$ dénote le fait de remplir le contexte \mathcal{C} avec le processus Q .

Définition Congruence de processus

Soit \cong une relation d'équivalence sur \mathcal{P} alors \cong est une congruence de processus si elle est préservée par tous les contextes élémentaires,

c-à-d si $P \cong Q$ alors :

$$\alpha.P + M \cong \alpha.Q + M$$

$$\text{new } a P \cong \text{new } a Q$$

$$P \mid R \cong Q \mid R$$

$$R \mid P \cong R \mid Q$$

\cong arbitraire est une congruence de processus ssi $\forall \mathcal{C} P \cong Q \Rightarrow \mathcal{C}[P] \cong \mathcal{C}[Q]$

Congruence structurelle

Définition congruence structurelle

Un congruence structurelle (\equiv) est une congruence de processus sur \mathcal{P} déterminée par les équations suivantes :

- 1 α -conversion
- 2 Permutation de termes dans une somme
 $P + Q \equiv Q + P$; $P + 0 \equiv P$; $P + (Q + R) \equiv (P + Q) + R$
- 3 Permutation de termes dans un produit
 $P|Q \equiv Q|P$; $P|0 \equiv P$; $P|(Q|R) \equiv (P|Q)|R$
- 4 $(\nu a)\alpha.P \equiv \alpha.(\nu a)P$ si $\alpha \neq a$
- 5 $(\nu a)(\nu b)P \equiv (\nu b)(\nu a)P$
- 6 $\nu a(P|Q) \equiv P|\nu aQ$ si $a \notin \text{FN}(P)$
- 7 $\nu a(P + Q) \equiv P + \nu aQ$ si $a \notin \text{FN}(P)$
- 8 $\nu a0 \equiv 0$
- 9 $A\langle \vec{b} \rangle \equiv \{\vec{b}/\vec{a}\}P_A$ si $A(\vec{a}) =_{\text{def}} P_A$

Règles de réaction

Règles de réaction

$$\textcircled{1} \text{ TAU : } \frac{}{\tau.P + M \rightarrow P}$$

$$\textcircled{2} \text{ REACT : } \frac{}{(a.P + M) | (\bar{a}.Q + N) \rightarrow P | Q}$$

$$\textcircled{3} \text{ PAR : } \frac{P \rightarrow P'}{P | Q \rightarrow P' | Q}$$

$$\textcircled{4} \text{ RES : } \frac{P \rightarrow P'}{\nu a P \rightarrow \nu a P'}$$

$$\textcircled{5} \text{ STRUCT : } \frac{P \rightarrow P'}{Q \rightarrow Q'} \text{ if } P \equiv Q \text{ et } P' \equiv Q'$$

Déduction

Soit $P = \nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\bar{a})|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)$

On veut prouver que à partir de P on peut déduire $\nu aQ_1|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)$

Dédution

Soit $P = \nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\bar{a})|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)$

On veut prouver que à partir de P on peut déduire $\nu aQ_1|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)$

$$\frac{\frac{\frac{}{(a.Q_1 + b.Q_2)|\bar{a} \rightarrow Q_1 \mid \mathbf{0}}{(a.Q_1 + b.Q_2)|\bar{a} \rightarrow Q_1} \text{ (STRUCT)}}{\nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\bar{a}) \rightarrow \nu a.Q_1} \text{ (RES)}}{\nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\bar{a})|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2) \rightarrow \nu aQ_1|(\bar{b}.R_1 + \bar{a}.R_2)} \text{ (PAR)}$$

LTS et CCS

Définition LTS pour un processus P

Le LTS associé à un processus $P = \langle Q, T \rangle$ avec :

- $Q = \{P' \mid P \xrightarrow{*} P' \text{ est possible}\}$
- $T = \{P' \xrightarrow{\alpha} P'' \mid P' \xrightarrow{\alpha} P'' \text{ est possible} \wedge P', P'' \in Q\}$

Transitions et chemins

- Une transition $P' \xrightarrow{\alpha} P''$ est possible si on peut l'inférer à partir de règles de transition.
- Un chemin $P_0 \xrightarrow{+} P_n$ est possible s'il existe $P_1, \dots, P_{n-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.q.
 $P_0 \xrightarrow{\alpha_1} P_1; P_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} P_{i+1}; P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} P_n$ sont toutes possibles.
- Un chemin $P' \xrightarrow{*} P''$ est possible si $P' \equiv P''$ ou $P' \xrightarrow{+} P''$

Règles de transition

$$\frac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P} \text{ (act)}$$

$$\frac{P \xrightarrow{\bar{a}} P' \quad Q \xrightarrow{a} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'} \text{ (sync)}$$

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q} \text{ (par)}$$

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} P'} \text{ (sum)}$$

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \quad \alpha \notin \{\bar{a}, a\}}{\nu a P \xrightarrow{\alpha} \nu a P'} \text{ (res)}$$

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P[a/b] \xrightarrow{\alpha[a/b]} P' [a/b]} \text{ (ren)}$$

$$\frac{P\{v_1/x_1, \dots, v_n/x_n\} \xrightarrow{\alpha} P' \quad \text{avec } D(x_1, \dots, x_n) = P}{D\langle v_1, \dots, v_n \rangle \xrightarrow{\alpha} P'} \text{ (call)}$$

$$\frac{P \equiv P' \quad P \xrightarrow{\alpha} Q \quad Q \equiv Q'}{P' \xrightarrow{\alpha} Q'} \text{ (struct)}$$

Déduction

Soient :

$$A =_{def} a.A' \qquad A' =_{def} \bar{b}.A$$

$$B =_{def} b.B' \qquad B' =_{def} \bar{c}.B$$

On veut prouver $\nu b(A'|B) \xrightarrow{\tau} \nu b(A|B')$

Dédution

Soient :

$$A =_{def} a.A' \qquad A' =_{def} \bar{b}.A$$

$$B =_{def} b.B' \qquad B' =_{def} \bar{c}.B$$

On veut prouver $\nu b(A'|B) \xrightarrow{\tau} \nu b(A|B')$

$$\frac{\frac{\frac{}{} \text{(act)}}{\bar{b}.A \xrightarrow{\bar{b}} A} \text{(call)}}{A' \xrightarrow{\bar{b}} A} \quad \frac{\frac{\frac{}{} \text{(act)}}{b.B' \xrightarrow{b} B'}{\text{(call)}}}{B \xrightarrow{b} B'} \text{(sync)}}{A'|B \xrightarrow{\tau} A|B'} \text{(res)}}{\nu b(A'|B) \xrightarrow{\tau} \nu b(A|B')}$$

Réplication

CCS avec réception répliquée est donné par la syntaxe suivante :

$$P ::= O \mid P|P \mid \sum_i \alpha_i.P_i \mid (\nu a)P \mid !a.P$$

avec la règle : $(\bar{a}.Q \mid !a.P) \rightarrow (Q \mid P \mid !a.P)$

$$!a.(\bar{b} \mid \bar{b} \mid \bar{c}) \mid !b.(\bar{c} \mid \bar{c}) \mid \bar{a} \mid \bar{a} \mid \bar{b} \mid c$$

Références

Robin Milner

“Communicating and mobile systems : the π -calculus”