

# Modélisation de systèmes par automates finis

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction : modélisation par automates finis</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Systèmes de transitions et automates finis</b>	<b>2</b>
2.1	Définitions générales . . . . .	2
2.2	Equivalence de langages et déterminisation . . . . .	2
2.3	Modèles de calcul . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Opérations sur les automates finis</b>	<b>4</b>
3.1	Union, intersection . . . . .	4
3.2	Produit synchronisé . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Exemples de modélisation</b>	<b>6</b>

## 1 Introduction : modélisation par automates finis

Exemple de problèmes pour lesquels on cherche à construire un modèle :

1. Comportement d'un digicode comportant 3 touches  $A, B, C$ , et qui ouvre la porte dès que l'utilisateur a tapé le code  $ABA$ .
2. Traversée d'une rivière pour un loup, une chèvre et une salade, qui disposent d'un passeur avec une barque, avec les contraintes suivantes :
  - le passeur ne peut prendre qu'un passager dans sa barque,
  - pour des raisons de survie, le loup ne peut pas rester seul avec la chèvre, et la chèvre ne peut pas rester seule avec la salade.
3. Stratégie gagnante d'un barman aveugle (avec des gants de boxe) pour retourner des verres sur un plateau et réussir à ce que les 4 verres soient dans le même sens.
4. Comportement d'un couple producteur/consommateur (a) avec tampon quelconque, ou (b) avec tampon borné.
5. Dominos de Wang : pavage d'un plan (a), ou d'un carré  $5 \times 5$  (b), avec des dominos à 4 couleurs, de façon que deux couleurs adjacentes soient les mêmes.

### Exercice 1.

Dessiner :

- un modèle de comportement du digicode,
- un modèle pour le problème de la traversée,
- un modèle pour le problème du barman aveugle.

## 2 Systèmes de transitions et automates finis

### 2.1 Définitions générales

Etant donné un alphabet  $\Sigma$ , on rappelle que l'ensemble des mots sur cet alphabet est noté  $\Sigma^*$  et qu'un langage est un sous-ensemble de  $\Sigma^*$ . Par exemple, si  $\Sigma = \{a, b\}$  contient deux lettres,  $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, a^2, b^2, ab, ba, \dots\}$ .

L'opération de concaténation de deux mots, notée  $w_1 \cdot w_2$  ou simplement  $w_1 w_2$  pour deux mots  $w_1$  et  $w_2$  consiste à mettre  $w_2$  tout de suite après  $w_1$ . Par exemple, la concaténation des deux mots  $ab$  et  $ba$  produit le mot  $abba$ . Le mot vide  $\varepsilon$  n'a aucune lettre et vérifie  $w\varepsilon = \varepsilon w = w$  pour tout mot  $w$  de  $\Sigma^*$ .

**Exercice 2.** Décrire le langage du producteur/consommateur avec tampon non borné sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ , la lettre  $a$  représentant une opération de production et la lettre  $b$  une opération de consommation.

#### Définition 2.1.

Un système de transitions sur l'alphabet (d'actions)  $\Sigma$  est un triplet  $\mathcal{T} = (S, S_0, T)$  où  $S$  est l'ensemble des configurations,  $S_0$  est le sous-ensemble de  $S$  des configurations initiales et  $T \subseteq S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times S$  est l'ensemble des transitions.

On note généralement  $s \xrightarrow{a} s'$  une transition  $(s, a, s')$  de  $T$ . Une transition étiquetée par le mot vide  $\varepsilon$  correspond à l'exécution d'une action non observable, dite *action interne*.

Une exécution de  $\mathcal{T}$  est un chemin dans ce graphe, c'est-à-dire une séquence de transitions  $(s_0, a_1, s_1)(s_1, a_2, s_2) \dots$  qui s'écrit aussi  $s \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} s_2 \dots$ , commençant dans une configuration initiale. Le mot  $w = a_1 a_2 \dots$  est l'*étiquette* du chemin (ou de l'exécution).

**Définition 2.2.** Un automate fini est un système de transitions

- dont l'ensemble des configurations est fini (les éléments sont alors appelés des états),
- auquel on adjoint un sous-ensemble  $F$  de  $S$  correspondant à des états finals.

Si  $\mathcal{A} = (Q, Q_0, T, F)$  est un automate fini sur  $\Sigma$ , on peut lui associer le langage des mots acceptés, noté  $L(\mathcal{A})$  et défini par :

un mot  $w$  de  $\Sigma^*$  appartient à  $L(\mathcal{A})$  s'il existe une exécution finie  $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \dots \xrightarrow{a_n} q_n$  commençant dans un état initial ( $q_0 \in Q_0$ ), se terminant dans un état final ( $q_n \in F$ ) et ayant  $w$  comme étiquette.

### 2.2 Equivalence de langages et déterminisation

Deux automates finis  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sur un même alphabet  $\Sigma$  sont langage-équivalents si  $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$ . Pour tester cette équivalence, on peut associer à chaque automate fini un unique (aux noms près) automate canonique et comparer les automates canoniques associés aux deux automates de départ  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ . Cet automate canonique est obtenu à partir d'un automate  $\mathcal{A}$  en construisant d'abord un automate déterministe équivalent à  $\mathcal{A}$ , puis en minimisant cet automate déterministe.

**Définition 2.3.** Un automate fini  $\mathcal{A} = (Q, Q_0, T, F)$  sur  $\Sigma$  est déterministe si :

- il a un unique état initial  $Q_0 = \{q_0\}$ ,
- aucune transition n'est étiquetée par  $\varepsilon$ ,

- pour tous les états  $q, q_1, q_2$  de  $Q$  et pour toute lettre  $a \in \Sigma$ , si  $q \xrightarrow{a} q_1$  et  $q \xrightarrow{a} q_2$  alors  $q_1 = q_2$ .

On a alors :

**Proposition 2.4.** *Pour tout automate fini  $\mathcal{A}$ , on peut construire un automate fini déterministe  $\mathcal{D}$  qui soit langage-équivalent à  $\mathcal{A}$ .*

Partant de  $\mathcal{A} = (Q, Q_0, T, F)$ , la construction est la suivante :

- L'ensemble des états de  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des parties de  $Q$ , noté  $2^Q$  ou  $\mathcal{P}(Q)$ .
- L'unique état initial de  $\mathcal{D}$  est la partie

$$I = \{q \in Q \mid \text{il existe un état } q_0 \in Q_0 \text{ et un chemin d'étiquette } \varepsilon \text{ de } q_0 \text{ à } q\}.$$

- Une partie  $P$  de  $Q$  est un état final de  $\mathcal{D}$  ssi  $P \cap F \neq \emptyset$ .
- Pour toute partie  $P$  de  $Q$  et toute lettre  $a$  de  $\Sigma$ , la transition associée de  $\mathcal{D}$  est  $P \xrightarrow{a} P'$  avec :

$$P' = \{p' \in Q \mid \text{il existe des états } q \in Q \text{ et } p \in P \text{ tels que } p \xrightarrow{a} q \text{ est une transition dans } T \text{ et il existe un chemin d'étiquette } \varepsilon \text{ de } q \text{ à } p'\}.$$

### Exercice 3.

Quel est le nombre maximal d'états de l'automate déterminisé ?

Comparer l'automate fini du digicode avec un automate acceptant le langage  $\Sigma^*ABA$  des mots se terminant par  $ABA$ .

**Exercice 4.** Résoudre le problème de la stratégie du barman.

## 2.3 Modèles de calcul

Les machines à registres sont des modèles de calcul qui comportent un ensemble fini de registres manipulés par des opérations. Un compteur est un registre particulier qui peut contenir seulement une valeur entière et, à part l'initialisation, admet comme seules opérations : l'incréméntation et la décréméntation avec test à 0.

### Définition 2.5.

Une machine  $\mathcal{M}$  à deux compteurs  $C$  et  $D$  est une suite finie d'instructions étiquetées. Chaque instruction peut être soit l'instruction particulière *STOP*, soit une opération sur un des deux compteurs  $X \in \{C, D\}$  :

1.  $\ell : X := X + 1$ ; goto  $\ell'$ ;
2.  $\ell : \text{si } X > 0 \text{ alors } X := X - 1$ ; goto  $\ell'$ ;  
sinon goto  $\ell''$ ;

La sémantique d'une machine à deux compteurs  $\mathcal{M}$  est définie par un système de transitions  $\mathcal{T} = (S, S_0, T)$  où :

- une configuration  $s \in S$  est de la forme  $(\ell, n, m)$  où  $\ell$  est une étiquette, et  $n$  et  $m$  sont les valeurs respectives des compteurs  $C$  et  $D$  juste avant l'instruction  $\ell$ .
- Il y a une seule configuration initiale :  $S_0 = \{s_0\}$  avec  $s_0 = (\ell_0, 0, 0)$ , où  $\ell_0$  est l'étiquette de la première instruction.

- Pour une étiquette  $\ell$  ne correspondant pas à l'instruction *STP*, une transition de  $T$  fait passer de la configuration  $(\ell, n, m)$  à la configuration :
  - $(\ell', n + 1, m)$  si l'instruction d'étiquette  $\ell$  est de type 1. sur le compteur  $C$ ,
  - $(\ell', n - 1, m)$  si l'instruction d'étiquette  $\ell$  est de type 2. sur le compteur  $C$  et que  $n > 0$ , ou  $(\ell'', 0, m)$  si  $n = 0$ ,
  - ou des configurations similaires pour des opérations sur le compteur  $D$ .

**Exercice 5.**

Construire une machine à deux compteurs qui réalise l'addition  $3 + 2$ .

En déduire un automate fini dont le langage soit une abstraction du comportement de cette machine.

**Exercice 6.** Par analogie, définir une machine à un seul compteur et montrer comment modéliser le comportement d'un producteur/consommateur avec tampon non borné avec une telle machine.

**Exercice 7.** Montrer que le langage  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  ne peut pas être accepté par un automate fini.

Le problème de l'arrêt d'une machine à deux compteurs est défini par :

**Donnée :** une machine à deux compteurs

**Question :** existe-t-il une exécution qui atteint l'instruction *STOP*?

**Théorème 2.6** (Minski, 1967). *Le problème de l'arrêt d'une machine à deux compteurs est indécidable.*

Cela signifie qu'il n'existe pas d'algorithme qui, prenant en entrée une machine à deux compteurs, répond à la question par oui ou par non.

**Exercice 8.** Etudier la terminaison du problème de Collatz (appelé aussi conjecture de Syracuse), qui prend en entrée un entier naturel strictement positif :

Tant que  $n \neq 1$  faire  
     si  $n$  est pair  $n := n/2$   
     sinon  $n := 3n + 1$

### 3 Opérations sur les automates finis

#### 3.1 Union, intersection

On considère deux automates finis  $\mathcal{A}_1 = (Q_1, I_1, T_1, F_1)$  et  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, I_2, T_2, F_2)$  sur un même alphabet  $\Sigma$  et on note  $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$  et  $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$  les langages acceptés respectivement par ces deux automates.

**En supposant les ensembles d'états  $Q_1$  et  $Q_2$  disjoints**, un automate fini acceptant  $L_1 \cup L_2$  est défini par  $\mathcal{A} = (Q_1 \cup Q_2, I_1 \cup I_2, T_1 \cup T_2, F_1 \cup F_2)$ . Autrement dit, il suffit de considérer ces deux automates comme un seul, et il n'y a pas d'ambiguïté sur les transitions du fait que  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ .

Pour l'intersection, **on suppose qu'il n'y a pas de transitions étiquetées par  $\varepsilon$**  et on réalise une synchronisation entre les deux automates, en simulant des exécutions parallèles dans  $\mathcal{A}_1$  et dans  $\mathcal{A}_2$ . L'automate  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  accepte  $L_1 \cap L_2$ , avec  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = (Q_1 \times Q_2, I_1 \times I_2, T, F_1 \times F_2)$ , l'ensemble  $T$  des transitions étant défini par :

une transition  $(q_1, q_2) \xrightarrow{a} (q'_1, q'_2)$  est dans  $T$  si et seulement si  $q_1 \xrightarrow{a} q'_1$  est dans  $T_1$  et  $q_2 \xrightarrow{a} q'_2$  est dans  $T_2$ .

**Exercice 9.** Sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ , construire un automate  $\mathcal{A}_1$  qui accepte les multiples de 3 (écrits en binaire) et un automate  $\mathcal{A}_2$  qui accepte les multiples de 4 (également écrits en binaire).

En déduire un automate qui accepte les multiples de 12.

**Exercice 10.** Dans le cas général, donner la construction d'un automate fini qui accepte le produit  $L_1L_2$ . On rappelle que ce produit qui étend la concaténation contient les mots de la forme  $w_1w_2$ , où  $w_1$  appartient à  $L_1$  et  $w_2$  appartient à  $L_2$ .

Donner aussi la construction d'un automate fini qui accepte le produit  $L_1^*$ . On rappelle que ce langage contient les produits d'un nombre quelconque de mots de  $L_1$ .

**Exercice 11.** Montrer que le langage du producteur/consommateur avec tampon non borné ne peut pas être accepté par un automate fini.

### 3.2 Produit synchronisé

On considère trois alphabets  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma$  et deux automates finis  $\mathcal{A}_1 = (Q_1, I_1, T_1, F_1)$  sur  $\Sigma_1$  et  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, I_2, T_2, F_2)$  sur  $\Sigma_2$ , et une fonction de synchronisation  $f : (\Sigma_1 \cup \{-\}) \times (\Sigma_2 \cup \{-\}) \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  (la fonction est partielle, en particulier  $f(-, -)$  n'est pas défini). Le produit synchronisé de  $\mathcal{A}_1$  et de  $\mathcal{A}_2$  par  $f$ , noté  $\mathcal{A}_1 \otimes_f \mathcal{A}_2$ , généralise la construction de l'intersection :

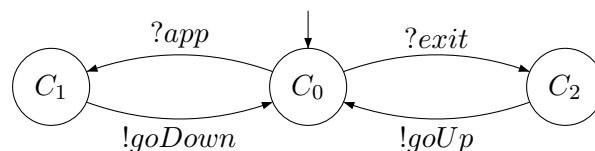
$$\mathcal{A}_1 \otimes_f \mathcal{A}_2 = (Q_1 \times Q_2, I_1 \times I_2, T, F_1 \times F_2),$$

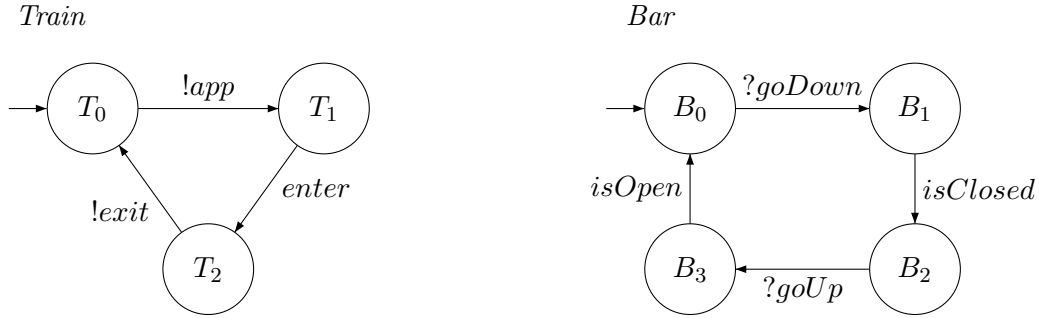
l'ensemble  $T$  des transitions étant défini par :

- une transition  $(q_1, q_2) \xrightarrow{f(a,b)} (q'_1, q'_2)$  est dans  $T$  si et seulement si
- $q_1 \xrightarrow{a} q'_1$  est dans  $T_1$  et  $q_2 \xrightarrow{b} q'_2$  est dans  $T_2$ , si  $a \neq -$  et  $b \neq -$ ,
  - $q'_1 = q_1$  et  $q_2 \xrightarrow{b} q'_2$  est dans  $T_2$ , si  $a = -$  et  $b \neq -$ ,
  - $q_1 \xrightarrow{a} q'_1$  est dans  $T_1$  et  $q'_2 = q_2$  si  $a \neq -$  et  $b = -$ .

**Exercice 12 (Examen 2012).** Afin de concevoir un modèle (très simplifié) pour un passage à niveau, on considère trois processus : un train, une barrière et un contrôleur. Au départ, le train est loin du passage à niveau. L'action *app* représente l'approche du train, qui entre ensuite dans la zone du passage à niveau (action *enter*). Enfin, le train s'éloigne (action *exit*)... pour revenir plus tard. Le rôle du contrôleur est de fermer la barrière à l'approche d'un train, de façon à interdire aux voitures de traverser la voie ferrée pendant que le train passe. Quand le train est passé, le contrôleur rouvre la barrière. Le train, le contrôleur et la barrière sont définis par les automates suivants :

*Cont*





Le système global est défini par  $\mathcal{S} = (\text{Train} \parallel \text{Cont} \parallel \text{Bar})_f$ , avec la fonction de synchronisation  $f$  donnée par la table suivante :

<i>Train</i>	<i>Cont</i>	<i>Bar</i>	<i>produit</i>
<i>!app</i>	<i>?app</i>	—	$\varepsilon$
<i>enter</i>	—	—	<i>enter</i>
<i>!exit</i>	<i>?exit</i>	—	$\varepsilon$
—	<i>!goDown</i>	<i>?goDown</i>	$\varepsilon$
—	<i>!goUp</i>	<i>?goUp</i>	$\varepsilon$
—	—	<i>isClosed</i>	<i>isClosed</i>
—	—	<i>isOpen</i>	<i>isOpen</i>

1. Représenter l'automate fini  $\mathcal{S}$  (prévoir de la place) et construire un automate déterministe équivalent (pour les langages acceptés).
2. Le système vérifie-t-il la propriété de sûreté : *lorsque que le train est dans le passage à niveau, la barrière est fermée* ?

## 4 Exemples de modélisation

Voici une liste d'exemples pour lesquels on peut obtenir une modélisation à l'aide d'automates finis.

1. Comportement d'une mémoire : bascule RS avec portes NON-OU.
2. Dictionnaires électroniques.
3. Digicode avec compteur d'erreurs : construire une machine à un compteur conduisant à un état d'erreur lorsque l'utilisateur s'est trompé 3 fois de suite dans la composition du code. En déduire un automate fini par dépliage.
4. Exclusion mutuelle pour deux processus qui partagent une variable entière  $T$  (valant 1 ou 2) : représenter d'abord le comportement d'un processus  $P_1$  qui exécute

```
Tant que vrai faire
  SR1
  Tant que  $T = 2$  faire rien;
  SC1
   $T := 2$ ;
```

puis le comportement de  $P_2$  et celui de la variable  $T$ . En déduire le comportement de l'ensemble avec une synchronisation sur  $T$ .