Aide mémoire réseaux de Petri

Master SAR – Modélisation de systèmes répartis (NI 405)

Premier semestre 2011-2012

1 Réseaux de Petri *classiques*

1.1 Définitions

Syntaxe. Un réseau de Petri est un quadruplet $\mathcal{N} = \langle P, T, \textit{Pré}, \textit{Post}\rangle$ où :

- P est un ensemble de places,
- T est un ensemble de transitions,
- $P \cap T = \emptyset$,
- *Pré* : $P \times T \to \mathbb{N}$ est la relation de précondition,
- *Post* : $P \times T \to \mathbb{N}$ est la relation de postcondition,

On peut y ajouter $m_0 \in P \to \mathbb{N}$, le marquage initial.

Sémantique.

- Une configuration d'un réseau de Petri ou *marquage* est un élément de $\mathbb{N}^P$, c'est à dire un vecteur indexé par les places.
- Depuis un marquage $m \in \mathbb{N}^P$, une transition $t \in T$ est *franchissable* (on dit encore *activée* ou *tirable*) depuis m si :
$$\forall p \in P, m(p) \geq \textit{Pré}(p,t).$$
On écrit alors $m\,[t\rangle$ ou $m \xrightarrow{t}$.
- Si t est franchissable de puis m, on atteint alors le marquage m', ce qui est noté $m\,[t\rangle\, m'$ (ou $m \xrightarrow{t} m'$) où m' est défini par :
$$\forall p \in P, m'(p) = m(p) - \textit{Pré}(p,t) + \textit{Post}(p,t).$$
- Ces définitions s'étendent aux séquences de transitions.
- Un marquage est *accessible* depuis m_0 si :
$$\exists \sigma \in T^*, m_0\,[\sigma\rangle\, m.$$

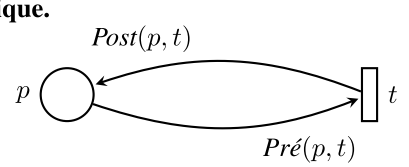
Le *graphe des marquages accessibles* de $\mathcal{N}$ depuis m_0 est le graphe dont les états sont les marquages accessibles et la relation de transition est $[\cdot\rangle$. On le construit itérativement depuis m_0, en construisant pour chaque marquage atteint ses successeurs par toutes les transitions franchissables. On note $\mathcal{G}(\mathcal{N}, m_0)$ ce graphe, ou $\mathcal{G}(\mathcal{N})$ lorsque le marquage initial est évident.

Le graphe des marquages peut être infini.

Représentation graphique.

La valeur par défaut (1) est omise.

Un arc à valeur 0 n'est pas dessiné.



Représentation matricielle

$$\textit{Pré} = \begin{pmatrix} \textit{Pré}(p_1,t_1) & \textit{Pré}(p_1,t_2) & \cdots & \textit{Pré}(p_1,t_{|T|}) \\ \textit{Pré}(p_2,t_1) & \textit{Pré}(p_2,t_2) & \cdots & \textit{Pré}(p_2,t_{|T|}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \textit{Pré}(p_{|P|},t_1) & \textit{Pré}(p_{|P|},t_2) & \cdots & \textit{Pré}(p_{|P|},t_{|T|}) \end{pmatrix}$$

$$\textit{Post} = \begin{pmatrix} \textit{Post}(p_1,t_1) & \textit{Post}(p_1,t_2) & \cdots & \textit{Post}(p_1,t_{|T|}) \\ \textit{Post}(p_2,t_1) & \textit{Post}(p_2,t_2) & \cdots & \textit{Post}(p_2,t_{|T|}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \textit{Post}(p_{|P|},t_1) & \textit{Post}(p_{|P|},t_2) & \cdots & \textit{Post}(p_{|P|},t_{|T|}) \end{pmatrix}$$

On note $C = \textit{Post} - \textit{Pré}$ la matrice d'incidence.

La matrice d'incidence donne le résultat du franchissement de chaque transition, mais elle ne donne pas la condition de franchissabilité.

Un marquage peut être vu comme un vecteur colonne :

$$m = \begin{pmatrix} m(p_1) \\ m(p_2) \\ \vdots \\ m(p_{|P|}) \end{pmatrix}$$

Pour une séquence de transition σ, le *vecteur de Parikh* de σ est le vecteur ligne $\underline{\sigma}$ qui donne pour chaque transition son nombre d'occurrences dans σ.

Si $m\,[\sigma\rangle\, m'$, on a alors $m' = m + C \cdot \underline{\sigma}$.

1.2 Propriétés fondamentales

Existence d'une séquence infinie.

$$\exists \sigma \in T^\omega, \forall \sigma' \in T^*, \sigma' \preceq \sigma \Rightarrow m_0\,[\sigma'\rangle$$

Pseudo-vivacité « Le réseau n'est jamais bloqué »

$$\forall m \in \mathcal{G}(\mathcal{N}, m_0), \exists t \in T, m\,[t\rangle$$

Quasi-vivacité « Toute transition est utile »

$$\forall t \in T, \exists m \in \mathcal{G}(\mathcal{N}, m_0), m\,[t\rangle$$

Vivacité « Toute transition est toujours utile »

$$\forall m \in \mathcal{G}(\mathcal{N}, m_0), \forall t \in T, \exists m' \in \mathcal{G}(\mathcal{N}, m), m'\,[t\rangle$$

Caractère non-borné

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathcal{G}(\mathcal{N}), \exists p \in P, m(p) > n$$

État d'accueil « Un marquage où l'on peut toujours revenir »

m_a est un état d'accueil si $\forall m \in \mathcal{G}(\mathcal{N}), m_a \in \mathcal{G}(\mathcal{N}, m)$

1.3 Couverture

L'ordre de *couverture* $\leq$ sur les marquages est défini par :

$$\forall m, m' \in \mathbb{N}^P, m \leq m' \iff \forall p \in P, m(p) \leq m'(p)$$

L'ordre de couverture strict est donc :

$$\forall m, m' \in \mathbb{N}^P, m < m' \iff \begin{cases} \forall p \in P, m(p) \leq m'(p) \\ \wedge\ \exists p \in P, m(p) < m'(p) \end{cases}$$

Monotonie. La franchissabilité, la quasi-vivacité, le caractère non-borné du réseau sont des propriétés monotones. Cas de la franchissabilité :

$$\forall m_1, m_2, m_1' \in \mathbb{N}^P, \forall \sigma \in T^*(m_1 \leq m_2 \ \wedge \ m_1 [\sigma\rangle\, m_1') \\ \implies (\exists m_2' \in \mathbb{N}^P, m_2 [\sigma\rangle\, m_2' \ \wedge \ m_1' \leq m_2')$$

La pseudo-vivacité, la vivacité, et le fait d'avoir un état d'accueil ne sont pas monotones

Graphe de couverture On construit l'arbre de couverture itérativement :

1) Construire les successeurs par toutes les transitions franchissables.
2) Si un marquage déjà ancêtre est construit, on arrête la branche.
3) Si un marquage m couvre strictement un ancêtre m', on remplace $m(p)$ par ω dès que $m(p) > m'(p)$.

On replie l'arbre en fusionnant les états identiques.

- Le graphe de couverture est fini.
- Si le graphe n'a pas d'ω, le réseau est borné.
- Sinon, un ω signifie que l'on peut atteindre un marquage arbitrairement grand dans cette place.
- Si une composante fortement connexe terminale du graphe de couverture ne contient pas toutes les transitions, alors $\mathcal{N}$ n'est pas vivant. k
- Si le graphe de couverture a un nœud sans successeur, alors $\mathcal{N}$ n'est pas pseudo-vivant.

Le graphe de couverture ne préserve pas l'ensemble des marquages accessibles. Il ne permet pas non plus de connaître le chemin à prendre pour couvrir un marquage donné (on peut cependant le dériver de l'arbre).

1.4 Extensions par arcs inhibiteurs

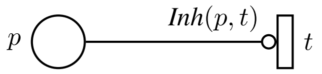
On ajoute une fonction d'*inhibition* $Inh : P \times T \to (N \setminus \{0\}) \uplus \{+\infty\}$ qui modifie la définition de franchissabilité comme suit :

$$m\,[t\rangle \text{ ssi } \forall p \in P, \textit{Pré}(p,t) \leq m(p) < \textit{Inh}(p,t)$$

L'expressivité est accrue, mais il est aisé d'encoder une machine à deux compteurs : l'accessibilité d'un marquage n'est plus décidable.

Représentation graphique.

La valeur par défaut (1) est omise.



Un arc inhibiteur à valeur $+\infty$ n'est pas dessiné.

2 Réseaux de Petri colorés

Dans chaque place, on n'a plus des jetons indifférenciés mais des jetons *colorés* : on les compte par couleur dans un *multi-ensemble*.

Un multi-ensemble sur C est une fonction de C vers $\mathbb{N}$. Pour deux multi-ensembles $\mu, \mu' \in \textit{Bag}(C)$, $\mu \leq \mu'$ si $\forall c \in C, \mu(c) \leq \mu'(c)$. On les note parfois comme une somme d'éléments de C.

Syntaxe. Un *réseau de Petri coloré* est un quintuplet $\langle P, T, C, W^-, W^+, g\rangle$ où :

- P est un ensemble de places,
- T est un ensemble de transitions,
- $P \cap T = \emptyset$,
- C est la fonction de couleur définie sur $P \uplus T$,
- W^- est la relation de précondition,
- W^+ est la relation de postcondition,
- $\forall p \in P, \forall t \in T, W^{\pm}(p,t) : \textit{Bag}(C(t)) \to \textit{Bag}(C(p))$ est une fonction linéaire,
- g la garde, telle que $\forall t \in T, g(t) \subseteq C(t)$.

On peut aussi y ajouter m_0, le marquage initial, tel que pour $p \in P$, $m(p) \in \textit{Bag}(C(p))$.

Sémantique

- Un marquage associe à chaque place p un multi-ensemble sur $C(p)$.
- Depuis un marquage m, une transition t est franchissable avec une instance $c_t \in C(t)$ si :

  $$c_t \in g(t) \ \wedge \ \forall p \in P, m(p) \geq W^-(p,t)(c_t)$$

  On écrit alors $m\,[t, c_t\rangle$ (ou $m \xrightarrow{t,c_t}$).
- Si t est franchissable depuis m avec l'instance c_t, on atteint alors le marquage m', ce qui est noté $m\,[t, c_t\rangle\, m'$ (ou $m \xrightarrow{t,c_t} m'$) où m' est défini par :

  $$\forall p \in P, m'(p) = m(p) - W^-(p,t)(c_t) + W^+(p,t)(c_t).$$

Couleurs et fonctions classiques de pré/post-condition. Les domaines de couleurs sont *finis*, autrement on encode aisément un emachine à (deux) compteurs. Ce sont souvent des produits cartésiens d'ensembles finis.

Un domaine de couleur *ordonné circulairement* de taille k est un ensemble isomorphe à $(\{0, \ldots, k-1\}$. On écrit alors $x{+}{+}$ au lieu de $x + 1[k]$.

Le raccourci $C.All$ désigne « un jeton de chaque couleur dans C » : $C.All = \sum_{c \in C} c$, ou encore $\forall c \in C, C.All(c) = 1$.

Dépliage Le *dépliage* transforme un réseau coloré en un réseau classique. Il consiste à séparer la place p en une place par couleur dans $C(p)$ et chaque transition t en une transition par instance de $C(t)$ (satisfaisant la garde).

Le dépliage de $\mathcal{N} = \langle P, T, C, W^-, W^+, g\rangle$ en $\mathcal{N}_{\text{NB}} = \langle P_{\text{NB}}, T_{\text{NB}}, \textit{Pré}, \textit{Post}\rangle$ se définit par :

- $P_{\text{NB}} = \bigcup_{p \in P} \{(p,c) | c \in C(p)\}$
- $T_{\text{NB}} = \bigcup_{t \in T} \{(t,c) | c \in C(t) \cap g(t)\}$
- $\forall (p, c_p) \in P_{\text{NB}}, \forall (t, c_t) \in T_{\text{NB}}$,

  $$\textit{Pré}((p,c_p),(t,c_t)) = W^-(p,t)(c_t)(c_p).$$

- $\forall (p, c_p) \in P_{\text{NB}}, \forall (t, c_t) \in T_{\text{NB}}$,

  $$\textit{Post}((p,c_p),(t,c_t)) = W^+(p,t)(c_t)(c_p).$$

Le marquage initial m_0 se déplit en $m_{0,\text{NB}}$ tel que pour $(p,c) \in P_{\text{NB}}$ $m_{0,\text{NB}}(p,c) = m_0(p)(c)$.