Exercices Cours M2 : Complexité des Problèmes Combinatoires

Exercice 1

Une donnée pour le problème de décision X3C (Partition en sous-ensembles de 3 éléments) est constituée:

1. d'un ensemble fini $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ où $n = 3k$;
2. d'une famille $\mathcal{F} = \{F_1, \cdots, F_q\}$ de parties de E *contenant chacune exactement* 3 *éléments.*

La question posée est: "Existe-t-il dans $\mathcal{F}$ une partition de E, c'est-à-dire une sous-famille $\{F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}\}$ qui est une partition de E"? On admet dans la suite que le problème *X3C est NP-complet.*
Question 1 —2 Donner une fonction longueur pour X3C.

Question 2 —2 Montrer que X3C est dans NP.

Une donnée du problème PIT (Partition en triangles) est constituée d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ dont le nombre n de sommets est égal à $3K$. la question posée est: "Existe-t'il une partition de S en sous-ensembles $V_1, \cdots, V_K$ de 3 sommets chacun telle que le sous-graphe induit par chaque V_i est un triangle"? La figure **??** représente un énoncé de PIT pour lequel la réponse est oui.

Question 3 —2 Donner une fonction longueur pour PIT.
Question 4 —2 Montrer que PIT est dans NP.

On considère la transformation de X3C en PIT ci dessous. Soit $I_1 = (E, \mathcal{F})$ un énoncé de X3C. On lui fait correspondre l'énoncé $I_2 = (S, A)$ de PIT suivant:

- à chaque $e_j \in E$, on associe un sommet de S noté E_j;
- à chaque $F_i = \{e_s, e_t, e_u\} \in \mathcal{F}$, on associe la structure notée $\sigma(F_i)$ représentée sur la figure **??**. (On remarquera que les sommets de $\sigma(F_i)$ autres que E_s, E_t, E_u ne peuvent être couverts que par les triangles propres à cette structure)

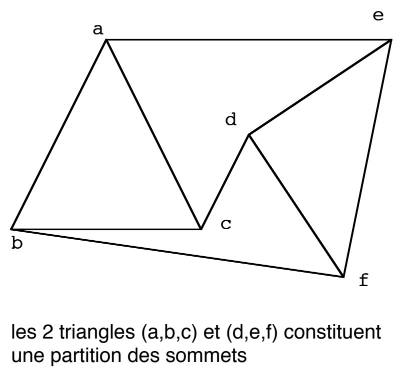

Figure 1: Un énoncé à réponse oui de PIT

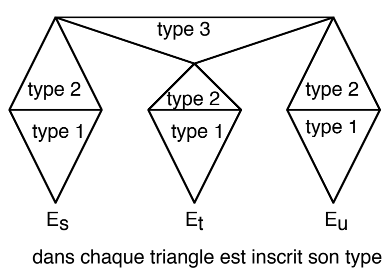

Figure 2: Une structure $\sigma(F_i)$

Question 5 —2 Dessiner le graphe I_2 associé à la donnée I_1 suivante: $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, $F_1 = \{a, b, c\}$, $F_2 = \{a, c, e\}$ et $F_3 = \{d, e, f\}$.
Question 6 —4 Montrer que si $\{F_i\}_{i \in I}$ est une partition de E alors si l'on considère pour chaque $i \in I$ les 4 triangles de type 1 et 3 et pour chaque $i \notin I$ les 3 triangles de type 2, on obtient une partition de I_2 en triangles.
Question 7 —4 Réciproquement, soit $\mathcal{T}$ une partition de I_2 en triangles.

Démontrer que quelle que soit la structure $\sigma(F_i)$, soit $\mathcal{T}$ contient les 4 triangles de type 1 et 3 de cette structure soit $\mathcal{T}$ contient les 3 triangles de type 2 de cette structure.
Démontrer que si $\mathcal{T}$ contient les 3 triangles de type 1 de deux structures $\sigma(F_i)$ et $\sigma(F_j)$, alors $F_i \cap F_j = \emptyset$.
En déduire que si J désigne l'ensemble des indices des structures pour lesquelles $\mathcal{T}$ contient les 4 triangles de type 1 et 3, alors $\{F_i\}_{i \in J}$ est une partition de E.
Question 8 —2 Déduire de ce qui précède que PIT est un problème NP-complet.

Exercice 2

Le problème de décision 3DM est défini comme suit: étant donnés 3 ensembles disjoints deux à deux $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ et $C = \{c_1, \cdots, c_n\}$ (de même cardinalité n) et une famille M de triplets de $A \times B \times C$, existe t'il une partie M' de M telle que chaque élément de A, B et C apparaît une fois et une seule dans M'? On admet que le problème 3DM est NP-complet.
On s'intéresse alors au problème de décision $X3C$ défini comme suit: étant donnés un entier $p = 3q$, un ensemble $X = \{x_1, \cdots, x_p\}$ et une famille F de sous-ensembles à 3 éléments de X, existe t'il une partie F' de F constituant une partition de X.
Question 1 —Démontrer que X3C est dans NP.

Question 2 —Déterminer une réduction polynomiale de 3DM à X3C pour montrer que X3C est NP-complet.
Question 3 —On s'intéresse ici au problème de décision $X4C$ défini comme suit: étant donnés un entier $p = 4q$, un ensemble $X = \{x_1, \cdots, x_p\}$ et une famille F de sous-ensembles à 4 éléments de X, existe t'il une partie F' de F constituant une partition de X. Déterminer une réduction polynomiale de X3C à X4C pour montrer que X4C est NP-complet.

Exercice 3

On considère le problème d'ordonnancement noté O1M suivant. On dispose d'une machine M pour exécuter n tâches $T_1, \cdots, T_n$. Pour chaque tâche T_i, on connaît sa durée p_i (entier naturel), sa date de début au plus tôt r_i (entier naturel) et sa date de fin au plus tard d_i (entier naturel). On suppose bien sûr que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}, r_i + p_i \leq d_i$. Chaque tâche T_i doit donc être exécutée sur M dans la fenêtre temporelle $[r_i, d_i]$. La question est de savoir s'il existe un ordonnancement des n tâches sur M. On admettra que la fonction $l_{O1M}(I) = n\lceil \log_2(D) \rceil$, où $D = \max_{i\in\{1,\cdots,n\}} d_i$ est une fonction longueur pour O1M.

Question 1 —Montrer que O1M est dans NP.

Question 2 —On rappelle que le problème de décision PARTITION est défini comme suit: étant donnés un ensemble $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ et une fonction $s : A \mapsto \mathbb{N}$ telle que $\sum_{i\in\{1,\cdots,n\}} s(a_i) = 2K$, la question est de savoir s'il existe une partie B de A telle que: $\sum_{a\in B} s(a) = K$. On rappelle également que $l_{PARTITION}(A, s) = n\lceil \log_2(K) \rceil$ est une fonction longueur pour PARTITION et que PARTITION est NP-complet.
A l'énoncé général $I = (A, s)$ de PARTITION, on associe l'énoncé $f(I)$ de O1M dont l'ensemble des tâches est formé d'une tâche T_0 ($r_0 = K, p_0 = 1, d_0 = K+1$), et pour chaque $a_i \in A$, d'une tâche T_i ($r_i = 0, p_i = s(a_i), d_i = 2K + 1$).
Démontrer que f est une réduction polynomiale de PARTITION à O1M. Que peut-on en déduire pour la complexité de O1M?

Exercice 4

On rappelle qu'un énoncé du problème 3.SAT est défini à partir d'un ensemble X de p variables logiques $x_1, \cdots, x_p$ et d'un ensemble C de q clauses à 3 littéraux $C_1, \cdots, C_q$ sur X. La clause C_r est constituée de l'ensemble des 3 littéraux $\{l_1^r, l_2^r, l_3^r\}$. Un littéral est soit une variable soit sa forme complémentée. Etant donnée une fonction de vérité sur X, une clause est vraie si au moins un de ses 3 littéraux est vrai. Le problème de décision 3.SAT consiste à décider si, étant donné un énoncé (X, C), il existe une fonction de vérité sur X pour laquelle toutes les clauses de C sont vraies. On rappelle que le problème 3.SAT est NP-complet et qu'une fonction longueur possible pour 3.SAT est $l_{3.SAT}(X, C) = pq$.

Un énoncé du problème CLIQUE est constitué d'un graphe non orienté $G = (V, A)$ (on note n le nombre de sommets de G) et d'un entier k ($1 < k < n$). Une clique d'ordre k de G est un *sous-graphe complet* induit par k sommets de G (pour le graphe de la figure **??**, l'ensemble $\{a, b, h, i\}$ induit une clique d'ordre 4). Le problème de décision CLIQUE consiste à décider si, étant donné un énoncé (G, k), le graphe G possède une clique d'ordre k.

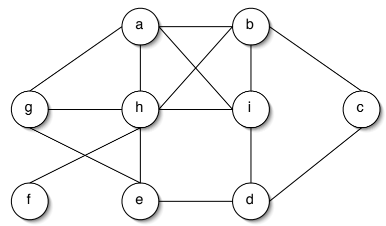

Figure 3: Une clique d'ordre 4 : $\{a, b, h, i\}$

L'objet de l'exercice est de montrer que CLIQUE est NP-complet à partir d'une réduction polynomiale de 3.SAT.

Question 1 —Montrer qu'une fonction longueur possible pour CLIQUE est $l_{CLIQUE}(G, k) = n$.

Question 2 —Montrer que CLIQUE est dans NP.

Dans la suite, on considère la transformation f qui associe à chaque énoncé $I = (X, C)$ de 3.SAT l'énoncé $f(I) = (G, k)$ où $G = (V, A)$ et k sont définis comme suit :

1. pour *chaque clause* $C_r = \{l_1^r, l_2^r, l_3^r\}$ ($1 \leq r \leq q$), on crée 3 *nouveaux* sommets v_1^r, v_2^r, v_3^r dans G ;
2. pour *chaque paire de sommets* v_i^r et v_j^s, on crée une arête $\{v_i^r, v_j^s\}$ dans G si le littéral l_i^r n'est pas la forme complémentée du littéral l_j^s ;
3. on donne à k la valeur q.

Question 3 —Déterminer l'énoncé $f(I)$ associé à l'énoncé I de 3.SAT défini par : $p = q = 3$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ avec $C_1 = \{x_1, \overline{x_2}, \overline{x_3}\}$, $C_2 = \{\overline{x_1}, x_2, x_3\}$ et $C_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Question 4 —Soit $I = (X, C)$ un énoncé satisfiable. Démontrer que pour l'énoncé $f(I) = (G, k)$, il existe une clique d'ordre k dans G.

Question 5 —Soit $I = (X, C)$ un énoncé de 3.SAT tel que pour l'énoncé $f(I) = (G, k)$, il existe une clique d'ordre k dans G. En définissant une fonction de vérité pour I à partir des sommets de la clique, démontrer que I est satisfiable.

Question 6 —Déduire des questions précédentes que CLIQUE est NP-complet.