

# M1 IAD UE Décision et Jeux

## Corrigé du TD N°4

Christophe Gonzales      Pierre-Henri Wuillemin

28 février 2007

### Exercice 1

Matrice du jeu :

	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>H</i>	(73,25)	(57,42)	(66,32)
<i>M</i>	(80,26)	(35,12)	(32,54)
<i>B</i>	(28,27)	(63,31)	(54,29)

a) Il n'existe pas d'équilibre en stratégies strictement dominantes (double raison : 1) aucune ligne ne donne strictement plus, composante par composante, que toutes les autres lignes ; 2) aucune colonne ...)

Un seul équilibre de NASH : (*B,C*) pour un paiement (63,31) (63 est maximum dans sa colonne et 31 maximum dans sa ligne).

b) Recherche d'un équilibre itéré en stratégies strictement dominantes.

b) On élimine successivement :

$$G \text{ str}^t \text{ dominé par } D \rightarrow \begin{array}{c} H \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline C & D \\ \hline (57,42) & (66,32) \\ (35,12) & (32,54) \\ (63,31) & (54,29) \\ \hline \end{array} ; \quad M \text{ str}^t \text{ dominé par } H \text{ et } B \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} H \\ B \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline C & D \\ \hline (57,42) & (66,32) \\ (63,31) & (54,29) \\ \hline \end{array} ; \quad D \text{ str}^t \text{ dominé par } C \rightarrow \begin{array}{c} H \\ B \end{array} \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline (57,42) \\ (63,31) \\ \hline \end{array} ;$$

$$H \text{ str}^t \text{ dominé par } B \rightarrow B \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline (63,31) \\ \hline \end{array} . \text{ Reste } (B,C) \text{ qui est l'équilibre de NASH.}$$

(N.B. un équilibre itéré en stratégies strictement dominées, ou d'ailleurs en stratégies dominées, est nécessairement un équilibre de NASH ; en revanche, un équilibre de NASH ne peut pas toujours s'obtenir ainsi)

## Exercice 2

Matrice de jeu :

	$G$	$C$	$D$
$H$	(1,0)	(-2, -1)	(0,1)
$B$	(1,2)	(-5, -1)	(0,0)

a) Recherche d'un équilibre itéré en stratégies dominantes.

On peut observer que le joueur 1 peut éliminer  $B$  dominée par  $H$  ; le joueur 2 peut alors éliminer  $G$  et  $C$ , (strictement) dominées par  $D$  ; on trouve donc un équilibre itéré  $(H,D)$ .

Mais on peut observer d'abord que le joueur 2 peut éliminer  $C$  (strictement) dominée par  $D$  ; dans la sous-matrice restante,  $H$  et  $B$  sont équivalentes ; on ne peut poursuivre l'élimination et ne trouve donc pas d'équilibre.

Autrement dit, chaque joueur ne peut pas être sûr que l'autre fera les mêmes éliminations que lui ; donc, même s'il trouve un équilibre itéré, il n'aura aucune garantie qu'il sera effectivement joué, son adversaire pouvant jouer une autre stratégie que la stratégie d'équilibre ; lui-même n'a alors plus de raison de jouer sa stratégie d'équilibre.

b) Il y a deux équilibres de NASH :  $(B,G)$  et  $(H,D)$  ; le second est l'équilibre itéré trouvé au (a) ; le premier ne s'obtient pas comme équilibre itéré (cf le N.B. à la fin de l'exercice précédent).

La conclusion générale est que, alors que l'on peut être sûr que des joueurs rationnels joueront l'équilibre itéré en stratégies *strictement* dominées, s'il existe, ce n'est pas le cas pour un équilibre itéré en stratégies dominées.

## Exercice 3

*Jeu de coordination pure*

Trois joueurs doivent choisir indépendamment, à l'insu les uns des autres, un chiffre (de 0 à 9). Si tous les trois choisissent le même chiffre  $m$ , chacun reçoit  $m$  € ; dans tous les autres cas, ils ne reçoivent rien.

a) Si les joueurs jouent au hasard équiprobablement à chaque partie, ils ont à chaque fois une très faible probabilité (une chance sur cent) de gagner . C'est pour eux une incitation à essayer de deviner ce que feront les autres...si ceux-ci réfléchissent eux-même. Par exemple, on sait que lorsque l'on demande à quelqu'un de dire un chiffre c'est plus souvent 7 ou 1 que 4 ou 8 ; c'est une incitation à jouer l'un de ces deux chiffres. Dans le cas présent, il y a une incitation commune à jouer 9 plutôt qu'un autre chiffre, puisque c'est le choix qui peut rapporter le plus. On dit que les joueurs doivent jouer des chiffres *focaux*.

Par ailleurs, comme le jeu est répété plusieurs fois avec les mêmes partenaires, jouer ce que les autres ont joué souvent dans le passé peut être une bonne idée (mais l'absence de coordination risque de rendre cette tactique inefficace).

b) Les équilibres de NASH du jeu sont tous les triplets de stratégies identiques ;  $(m, m, m)$ ,  $m \in \{0,1,2, \dots, 9\}$ . Il est clair que  $(9, 9, 9)$  domine strictement les autres équilibres au sens de PARETO.

## Exercice 4

### *Jeu de HEX*

Les joueurs marquent alternativement des cases hexagonales de leur couleur.  
Un joueur gagne s'il réussit à relier par une chaîne continue les deux bords de sa couleur du losange de jeu.

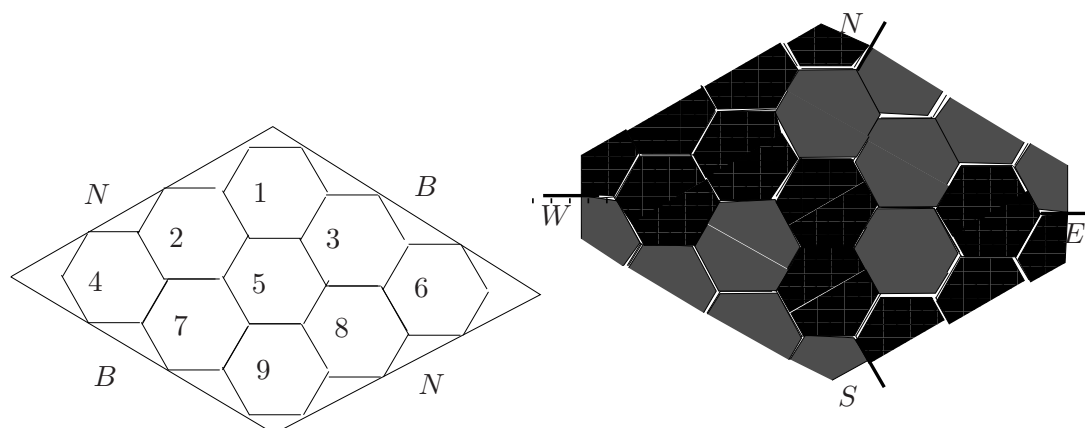


FIG. 1 – *Jeu de HEX 3 × 3*

1°) **Jeu 2 × 2**: supposons que les cases sont les cases 1,2,3 et 5 de la figure.  
Le premier joueur a plusieurs stratégies gagnantes ; en voici une : jouer 1 ; si le second joueur répond par 2, jouer 4 ; sinon, jouer 2.

**Jeu 3 × 3**. En développant au moins partiellement l'arbre du jeu, on voit que le premier joueur a plusieurs stratégies gagnantes ; en voici une : jouer 1 ; si le second joueur répond par autre chose que 7 ou 9, jouer 5 ; s'il répond par 9, jouer 7 ; s'il répond par 7, jouer 4, pour un gain évident sauf si le second joueur répond par 2 ; dans ce cas, jouer 9 ; le gain est évident sauf si le second joueur joue 5 , mais, dans ce cas, jouer 8 donne encore le gain au premier joueur.

2°) On part d'une coloration complète du jeu et ajoute le long de chaque bord des demi-hexagones de la couleur de ce bord, ainsi que des "oreilles" aux quatre coins (cf dessin de l'énoncé).

règle :

Départ en *W* ; à chaque intersection, tourner à gauche ou à droite de façon à toujours rester entre deux cases de couleurs opposées.

a) A chaque étape, le dernier arc tracé se trouve entre deux hexagones de couleurs différentes et son extrémité est un sommet commun à ceux-ci et à un 3<sup>ème</sup> hexagone, dont la couleur diffère de celle d'un des autres ; on peut donc ajouter un nouvel arc au chemin et il y a une seule possibilité. La règle détermine donc un chemin unique.

b) Il ne peut y avoir de circuit, car l'arc refermant le circuit devrait être à la fois blanc et noir. Le chemin se termine donc et ce ne peut être que par un arc entre deux cases (hexagonales ou pas) de couleurs différentes, donc en *N*, *S* ou *E* (en *W* il y aurait un circuit)

c) Les cases noires sont toujours sur la gauche lorsqu'on suit le chemin et les cases blanches toujours sur la droite.

Si le chemin se termine en  $S$ , le dernier hexagone à gauche est noir et touche un bord noir : il existe donc une chaîne noire ; symétriquement, il existe une chaîne blanche si c'est en  $N$ .

d) Le chemin ne peut se terminer en  $E$ , car les couleurs de part et d'autre du dernier arc ne sont pas du bon côté.

e) Supposons que c'est le deuxième joueur (joueur des noirs) qui a une stratégie gagnante. et que le joueur des blancs, qui commence, utilise la stratégie suivante :

*Jouer initialement au hasard ; puis :*

*jouer la stratégie gagnante des noirs quand c'est possible ; si cela ne l'est pas, parce que la case souhaitée est occupée, jouer au hasard.*

On voit que le jeu du premier joueur est exactement le même que s'il était autorisé à déplacer la première pièce posée chaque fois qu'elle le gêne ; en effet, les deux pièces -la première posée et celle qu'il veut poser- sont identiques (et blanches). Il pourra donc appliquer jusqu'au bout la stratégie gagnante du joueur des noirs.

N.B. Si le nombre de cases est pair ( $2N$ ) et qu'il faut éventuellement au deuxième joueur, dans sa stratégie gagnante, poser ses  $N$  pièces pour gagner, le premier joueur n'aura pas à en poser  $N + 1$  pour gagner (il n'en a que  $N!$ ) ; sa pièce vagabonde sera automatiquement où il faut!

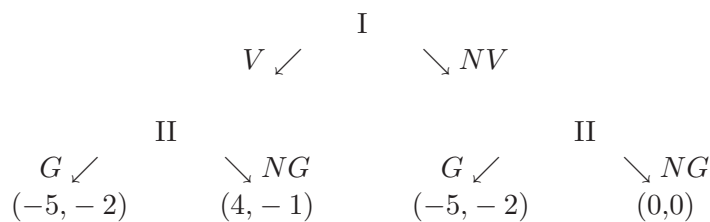
Comme les deux joueurs auraient alors chacun une stratégie gagnante, nous arrivons à une contradiction. C'est donc le premier joueur qui a une stratégie gagnante

### Exercice 5

1°) a) Stratégies de I:  $\{V, NV\}$  ;

stratégies de II (décision si  $V$ , décision si  $NV$ ) :  $\{(G,G), (G,NG), (NG,G), (NG,NG)\}$ .

Arbre du jeu :



b) Forme normale :

I \ II	(G,G)	(G,NG)	(NG,G)	(NG,NG)
V	$[(-5, -2)$	$(-5, -2)$	$(4, -1)$	$(4, -1)]$
NV	$[(-5, -2)$	$(0,0)$	$(-5, -2)$	$(0,0)]$

Pas de stratégies strictement dominantes ;  $(NG,NG)$  est dominante pour II ; par élimination de stratégies dominées, on obtiendrait pour solution  $[V, (NG,NG)]$ , c.-à-d. que I joue  $V$  et que II répond par  $NG$ .

Il y a 3 équilibres de Nash :  $[V, (NG,G)]$ ,  $[V, (NG,NG)]$  et  $[NV, (G,NG)]$ .

c) Sous forme normale le sous-jeu de racine II suivant  $V$  a pour matrice

$$\begin{array}{c|cc} \text{I} \setminus \text{II} & G & NG \\ \hline V & [(-5, -2)] & (4, -1) \end{array}$$

d'où pour équilibre  $[V, NG]$ .

Le sous-jeu de racine II suivant  $NV$  a pour matrice

$$\begin{array}{c|cc} \text{I} \setminus \text{II} & G & NG \\ \hline NV & [(-5, -2)] & (0,0) \end{array}$$

et pour équilibre  $[NG, NG]$ .

Dans les deux sous-jeux, II doit jouer  $NG$ .

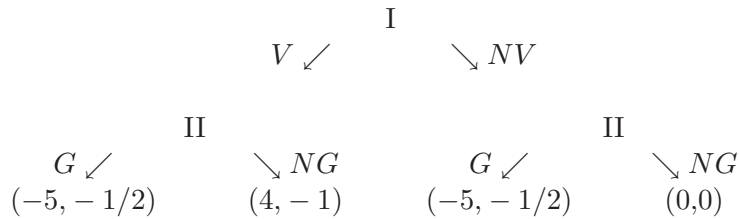
Le seul équilibre de Nash parfait en sous-jeux est donc  $[V, (NG, NG)]$ .

C'est aussi la solution, unique, du jeu que donne l'induction arrière.

2°) a) Stratégies de I:  $\{V, NV\}$ ;

stratégies de II (décision si  $V$ , décision si  $NV$ ):  $\{(G, G), (G, NG), (NG, G), (NG, NG)\}$ .

Nouvel arbre du jeu :



b) Forme normale :

$$\begin{array}{c|cccc} \text{I} \setminus \text{II} & (G, G) & (G, NG) & (NG, G) & (NG, NG) \\ \hline V & [(-5, -1/2)] & (-5, -1/2) & (4, -1) & (4, -1) \\ \hline NV & [(-5, -1/2)] & (0,0) & (-5, -1/2) & (0,0) \end{array}$$

Pour II,  $(G, NG)$  domine strictement  $(NG, G)$  qu'on peut donc supprimer :

$$\begin{array}{c|ccc} \text{I} \setminus \text{II} & (G, G) & (G, NG) & (NG, NG) \\ \hline V & [(-5, -1/2)] & (-5, -1/2) & (4, -1) \\ \hline NV & [(-5, -1/2)] & (0,0) & (0,0) \end{array}$$

Il y a deux équilibres de Nash dans ce jeu réduit :  $[V, (G, G)]$  et  $[NV, (G, NG)]$

Par élimination de stratégies dominées, on verrait que  $(G, NG)$  domine  $(G, G)$  et  $(NG, NG)$ , d'où

$$\begin{array}{c|cc} \text{I} \setminus \text{II} & (G, NG) \\ \hline V & [(-5, -1/2)] \\ \hline NV & [(0,0)] \end{array} \quad \text{puis, par élimination de } V \text{ par I,} \quad \begin{array}{c|cc} \text{I} \setminus \text{II} & (G, NG) \\ \hline NV & [(0,0)] \end{array} .$$

c) Sous forme normale le sous-jeu de racine II suivant  $V$  a pour matrice

$$\begin{array}{c|cc} \text{I} \setminus \text{II} & G & NG \\ \hline V & [(-5, -1/2)] & (4, -1) \end{array}$$

d'où l'équilibre  $[V, G]$ .

Le sous-jeu de racine II suivant  $NV$  a pour matrice

$$\begin{array}{c|cc} \text{I} \setminus \text{II} & G & NG \\ \hline NV & [(-5, -1/2) & (0,0)] \end{array}$$

et pour équilibre  $[NV,NG]$ .

Seul l'équilibre  $[NV,(G,NG)]$  est parfait en sous-jeux.

### Exercice 6

#### *Le mille-pattes de ROSENTHAL*

Par induction arrière, on constate que dans l'unique solution du jeu, qui est donc aussi l'unique équilibre de NASH parfait en sous-jeux, chaque joueur a pour stratégie "en tout sommet de décision, arrêter le jeu".

Le jeu s'arrêtera donc dès le premier sommet de décision du premier joueur, avec les paiements  $(4,0)$ .

Clairement la rationalité individuelle conduit dans ce jeu à une solution qui est très mauvaise du point de vue de la rationalité collective (il y a 3 optima de PARETO:  $(100,100)$ ,  $(101,97)$ ,  $(98,101)$ ). Dans de tels jeux, on peut s'attendre à ce que les joueurs ne se comportent pas rationnellement du point de vue de la rationalité individuelle.

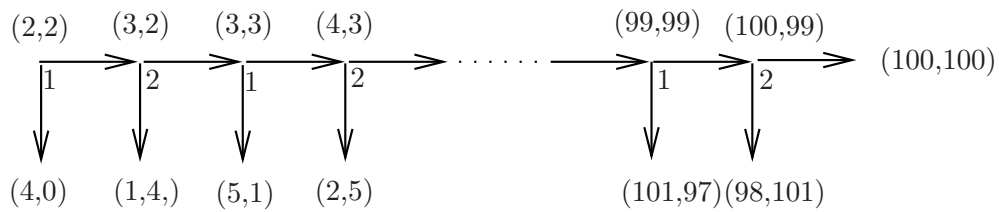


FIG. 2 – *Le mille-pattes*